日記 (2019 年 8 月 2 日)

前回は，景 $(\mathscr{C}, J)$ に対して，前層から層を作る関手 $\boldsymbol{a}\colon \mathbf{PSh}(\mathscr{C}) \to \mathbf{Sh}_J(\mathscr{C})$ を定義した．今回は，これが包含関手 $\boldsymbol{i}\colon \mathbf{Sh}_J(\mathscr{C}) \hookrightarrow \mathbf{PSh}(\mathscr{C})$ の左随伴になっていることを示す．

定義 1. 景 $(\mathscr{C}, J)$ をとる．前層 $P\colon \mathscr{C}^\circ \to \mathbf{Set}$ と対象 C に対し，射 $\eta_{PC}\colon PC \to P^+C$ を，合成

$$\begin{tikzcd} PC \arrow[r, "y_{PC}"] & \mathrm{Hom}(\boldsymbol{y}C, P) \arrow[d, equal] & \\ & \mathrm{Hom}(\top_C, P) \arrow[r, "i_{\top_C}"'] & \mathrm{colim}_S \mathrm{Hom}(S, P) \arrow[d, equal] \\ & & P^+C \end{tikzcd}$$

として定める．ここで，y_{PC} は Yoneda の定理による同型射で，$i_{\top_C}$ は余極限に定まる構造射の 1 つである．これが定める自然変換を $\eta_P\colon P \to P^+$ とする．

層化関手の随伴性の証明に直接は関係してこないが，η_P が単射もしくは同型射かどうかは P が分離前層になるか層になるかに密接に関わるので，ここで証明しておく．

命題 2. 景 $(\mathscr{C}, J)$ をとる．前層 $P\colon \mathscr{C}^\circ \to \mathbf{Set}$ に対し，P が分離前層であることと $\eta_P\colon P \to P^+$ が単射であることは同値である．

証明. $\eta_P\colon P \to P^+$ が単射であるとは，任意の対象 C に対して $\eta_{PC}\colon PC \to P^+C$ が単射であるということである．ここで，各対象 C に対し，定義から $\eta_{PC} = i_{\top_C} \circ y_{PC}$ であって y_{PC} は同型射だから，η_{PC} が単射であることと $i_{\top_C}$ が単射であることは同値である．したがって，P が分離前層であることと，任意の対象 C に対して $i_{\top_C}\colon \mathrm{Hom}(\top_C, P) \to P^+C$ が単射であることが同値になることを示す．

P が分離前層であると仮定する．任意の対象 C をとり，射 $a, a'\colon \top_C \to P$ が $i_{\top_C}a = i_{\top_C}a'$ を満たすとする．これは，P^+C を定める同値関係において a, a' が同値であるということなので，ある被覆篩 $S \in JC$ が存在して $a \circ S = a' \circ S$ が成り立つ．仮定から P は分離前層なので $\text{-} \circ S$ は単射であるから，これより $a = a'$ を得る．以上で，$i_{\top_C}$ は単射である．

逆に，任意の対象 C に対して $i_{\top_C}$ が単射であると仮定する．任意の被覆篩 $S \in JC$ に対し，

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\top_C, P) \arrow[r, "i_{\top_C}"] \arrow[d, "\text{-}\circ S"'] & P^+C \\ \mathrm{Hom}(S, P) \arrow[ur, "i_S"'] & \end{tikzcd}$$

は可換であるが，仮定から $i_{\top_C}$ は単射なので $\text{-} \circ S$ も単射である．よって，P は分離前層である．

命題 3. 景 $(\mathscr{C}, J)$ をとる．前層 $P\colon \mathscr{C}^\circ \to \mathbf{Set}$ に対し，P が層であることと $\eta_P\colon P \to P^+$ が同型射であることは同値である．

証明. 命題 2 のときと同様に，P が層であることと，任意の対象 C に対して $i_{\top_C}\colon \mathrm{Hom}(\top_C, P) \to P^+C$

が全単射であることが同値になることを示す．

P が層であると仮定する．任意の対象 C をとる．元 $\alpha \in P^+C$ をとり，これがある被覆篩 $S \in JC$ に対して $a\colon S \to P$ で代表されるとすると，$\alpha = i_S a$ である．仮定から P は層なので $\text{-} \circ S$ は全単射であるから，ある $a'\colon \top_C \to P$ が存在して $a = a' \circ S$ が成り立つ．したがって $\alpha = i_S(a' \circ S) = i_{\top_C} a'$ であるから，$i_{\top_C}$ が全射であることが示された．命題 2 によって $i_{\top_C}$ はすでに単射なので，$i_{\top_C}$ は全単射である．

逆に，任意の対象 C に対して $i_{\top_C}$ が全単射であると仮定する．任意に被覆篩 $S \in JC$ をとり，さらに射 $a\colon S \to P$ をとる．仮定から $i_{\top_C}$ が全単射なので，ある $a'\colon \top_C \to P$ が存在して $i_S a = i_{\top_C} a'$ が成り立つ．これは，P^+C において a, a' が同値であるということなので，ある被覆篩 $T \in JC$ が存在し，$T \subseteq S$ であって，

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[dr, "a"] & \\
T \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & P \\
 & \top_C \arrow[ur, "a'"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換である．ここで，任意の射 $f \in S\colon D \to C$ に対し，図式

$$\begin{tikzcd}
f^*T \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "f\circ\text{-}"'] \arrow[dd, hook] & & \boldsymbol{y}D \arrow[r, "f\circ\text{-}"] & S \arrow[r, "a"] & P \arrow[dd, equal] \\
 & T \arrow[urr, hook] \arrow[dd, hook] & & & \\
\boldsymbol{y}D \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "f\circ\text{-}"'] & & \boldsymbol{y}D \arrow[r, "f\circ\text{-}"] & \top_C \arrow[r, "a'"] & P \\
 & \boldsymbol{y}C \arrow[urr, equal] & & &
\end{tikzcd}$$

を考えると，左の四角形は f^*T の定義によって可換であり，上下の三角形は明らかに可換で，折れ曲がった長方形は上の図式と同じものなので可換である．したがって，横に長い長方形も可換である．ここで，命題 2 によって P が分離前層であることは分かっているので，写像

$$\text{-} \circ f^*T\colon \ \mathrm{Hom}(\boldsymbol{y}D, P) \to \mathrm{Hom}(f^*T, P)$$

は単射である．この事実と上の図式の可換性を踏まえると，

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[dr, "a"] & \\
\boldsymbol{y}D \arrow[ur, "f\circ\text{-}"] \arrow[dr, "f\circ\text{-}"'] & & P \\
 & \top_C \arrow[ur, "a'"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換であることが分かる．この図式において id_D の行き先を見ることで，$a_D f = a'_D f$ が得られる．f は S に属する任意の射であったから，これによって $a = a' \circ S$ が得られ，$\text{-} \circ S$ が全射であることが示された．命題 2 によって $\text{-} \circ S$ はすでに単射なので，$\text{-} \circ S$ は全単射となり，P は層である．

前層 P に対して定義した射 $\eta_P\colon P \to P^+$ は，層への射に関して普遍性をもつ．これが随伴性の鍵となる．

命題 4. 景 $(\mathscr{C}, J)$ をとる．前層 $P\colon \mathscr{C}^\circ \to \mathbf{Set}$ と層 $F\colon \mathscr{C}^\circ \to \mathbf{Set}$ に対し，任意の自然変換 $\varphi\colon P \to F$ は，

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\eta_P"] \arrow[dr, "\varphi"'] & P^+ \arrow[d, dashed, "\tilde{\varphi}"] \\ & F \end{tikzcd}$$

を可換にする自然変換 $\tilde{\varphi}$ によって，η_P を通して一意的に分解される．

証明. 任意の対象 C とそれ上の被覆篩 $S \in JC$ をとる．F は層であるから，包含射による写像

$$- \circ S\colon \mathrm{Hom}(\boldsymbol{y}C, F) \to \mathrm{Hom}(S, F)$$

は全単射であり，したがって逆写像をもつ．これを用いて，合成

$$\mathrm{Hom}(S, P) \xrightarrow{\varphi\circ -} \mathrm{Hom}(S, F) \xrightarrow{(-\circ S)^{-1}} \mathrm{Hom}(\boldsymbol{y}C, F) \xrightarrow{{y_{FC}}^{-1}} FC$$

を考えると，これらは関手 $\mathrm{Hom}(-, P)\colon JC^\circ \to \mathbf{Set}$ の余錐となる．したがって，この余極限である P^+C からの一意的な射 $\tilde{\varphi}_C\colon P^+C \to FC$ が存在する．これは C に関して自然なので，自然変換 $\tilde{\varphi}\colon P^+ \to F$ が得られる．

さて，定義によって，各対象 C に対し，

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(S, P) \arrow[rrr, "i_S"] \arrow[dr, "\varphi\circ -"'] & & & P^+C \arrow[d, "\tilde{\varphi}_C"] \\ & \mathrm{Hom}(S, F) \arrow[r, "(-\circ S)^{-1}"'] & \mathrm{Hom}(\boldsymbol{y}C, F) \arrow[r, "{y_{FC}}^{-1}"'] & FC \end{tikzcd}$$

は可換である．ここで特に $S = \top_C$ とおけば，図式

$$\begin{tikzcd} PC \arrow[r, "y_{PC}"] \arrow[d, "\varphi_C"'] & \mathrm{Hom}(\top_C, P) \arrow[r, "i_{\top_C}"] \arrow[d, "\varphi\circ -"'] & P^+C \arrow[d, "\tilde{\varphi}_C"] \\ FC \arrow[r, "y_{FC}"'] & \mathrm{Hom}(\boldsymbol{y}C, F) \arrow[r, "{y_{FC}}^{-1}"'] & FC \end{tikzcd}$$

の右側の四角形の可換性が得られるが，この左側の四角形も明らかに可換なので，全体も可換である．これはすなわち，ここで構成した $\tilde{\varphi}\colon P^+ \to C$ が命題の主張の図式を可換にしていることを意味する．

$\tilde{\varphi}$ の一意性は，余極限が誘導する射の一意性から従う．

定理 5. 景 $(\mathscr{C}, J)$ をとる．関手の随伴

$$\begin{tikzcd} \mathbf{PSh}(\mathscr{C}) \arrow[r, bend left, "\boldsymbol{a}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Sh}_J(\mathscr{C}) \arrow[l, bend left, "\boldsymbol{i}"] \end{tikzcd}$$

が成立する．すなわち，$\mathbf{Sh}_J(\mathscr{C})$ は $\mathbf{PSh}(\mathscr{C})$ の反射的部分圏である．

証明. 前層 $P\colon \mathscr{C}^\circ \to \mathbf{Set}$ に対し，合成

$$P \xrightarrow{\eta_P} P^+ \xrightarrow{\eta_{P^+}} P^{++}$$

を $\bar{\eta}_P$ とおく．命題 4 を 2 回使うことで，任意の層 $F\colon \mathscr{C}^\circ \to \mathbf{Set}$ への自然変換 $\varphi\colon P \to F$ は，

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\bar{\eta}_P"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{a}P \arrow[d, dashed, "\tilde{\varphi}"] \\ & F \end{tikzcd}$$

を可換にする自然変換 $\tilde{\varphi}$ によって，$\bar{\eta}_P$ を通して一意的に分解される．これは，定理の主張にある随伴が，$\bar{\eta}$ を単位として成立することを意味する．

以上で，層化関手をプラス構成を経由して定義し，それが包含関手の左随伴になっていることを証明した．MacLane–Moerdijk[1] ではこれを行うのに適合族やその融合を陽に扱っていたが，この日記では試しにそれを避けてみた．本当なら，プラス構成で用いた余極限の具体的な表示を使わずに，全て射だけの言葉で証明したかったが，あまりうまくいかず，中途半端な感じになってしまった[*1]．この辺りの議論はもうちょっとシンプルにやりたい．

次回は，層の圏 $\mathbf{Sh}_J(\mathscr{C})$ の極限と余極限について触れる．

参考文献

[1] S. MacLane, I. Moerdijk (1992)『Sheaves in Geometry and Logic』Springer

[*1] つらい．