

日記 (2019 年 8 月 2 日)

前回は、景 (\mathcal{C}, J) に対して、前層から層を作る関手 $\alpha: \mathbf{PSh}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}_J(\mathcal{C})$ を定義した。今回は、これが包含関手 $i: \mathbf{Sh}_J(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ の左随伴になっていることを示す。

定義 1. 景 (\mathcal{C}, J) をとる。前層 $P: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathbf{Set}$ と対象 C に対し、射 $\eta_{PC}: PC \rightarrow P^+C$ を、合成

$$\begin{array}{ccc} PC & \xrightarrow{y_{PC}} & \mathrm{Hom}(yC, P) \\ & & \parallel \\ & & \mathrm{Hom}(\tau_C, P) \xrightarrow{i_{\tau_C}} \mathrm{colim}_S \mathrm{Hom}(S, P) \\ & & \parallel \\ & & P^+C \end{array}$$

として定める。ここで、 y_{PC} は Yoneda の定理による同型射で、 i_{τ_C} は余極限に定まる構造射の 1 つである。これが定める自然変換を $\eta_P: P \rightarrow P^+$ とする。

層化関手の随伴性の証明に直接は関係してこないが、 η_P が単射もしくは同型射かどうかは P が分離前層になるか層になるかに密接に関わるので、ここで証明しておく。

命題 2. 景 (\mathcal{C}, J) をとる。前層 $P: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathbf{Set}$ に対し、 P が分離前層であることと $\eta_P: P \rightarrow P^+$ が単射であることは同値である。

証明. $\eta_P: P \rightarrow P^+$ が単射であるとは、任意の対象 C に対して $\eta_{PC}: PC \rightarrow P^+C$ が単射であるということである。ここで、各対象 C に対し、定義から $\eta_{PC} = i_{\tau_C} \circ y_{PC}$ であって y_{PC} は同型射だから、 η_{PC} が単射であることと i_{τ_C} が単射であることは同値である。したがって、 P が分離前層であることと、任意の対象 C に対して $i_{\tau_C}: \mathrm{Hom}(\tau_C, P) \rightarrow P^+C$ が単射であることが同値になることを示す。

P が分離前層であると仮定する。任意の対象 C をとり、射 $a, a': \tau_C \rightarrow P$ が $i_{\tau_C}a = i_{\tau_C}a'$ を満たすとする。これは、 P^+C を定める同値関係において a, a' が同値であるということなので、ある被覆篩 $S \in JC$ が存在して $a \circ S = a' \circ S$ が成り立つ。仮定から P は分離前層なので $- \circ S$ は単射であるから、これより $a = a'$ を得る。以上で、 i_{τ_C} は単射である。

逆に、任意の対象 C に対して i_{τ_C} が単射であると仮定する。任意の被覆篩 $S \in JC$ に対し、

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\tau_C, P) & \xrightarrow{i_{\tau_C}} & P^+C \\ \downarrow - \circ S & \nearrow i_S & \\ \mathrm{Hom}(S, P) & & \end{array}$$

は可換であるが、仮定から i_{τ_C} は単射なので $- \circ S$ も単射である。よって、 P は分離前層である。

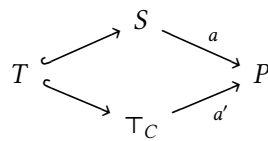
命題 3. 景 (\mathcal{C}, J) をとる。前層 $P: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathbf{Set}$ に対し、 P が層であることと $\eta_P: P \rightarrow P^+$ が同型射であることは同値である。

証明. 命題 2 のときと同様に、 P が層であることと、任意の対象 C に対して $i_{\tau_C}: \mathrm{Hom}(\tau_C, P) \rightarrow P^+C$

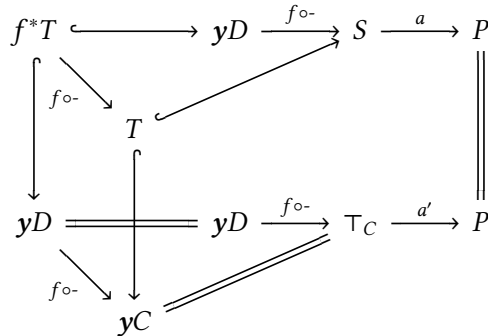
が全単射であることが同値になることを示す.

P が層であると仮定する. 任意の対象 C をとり. 元 $\alpha \in P^+C$ をとり, これがある被覆篩 $S \in JC$ に対して $a: S \rightarrow P$ で代表されるとすると, $\alpha = i_S a$ である. 仮定から P は層なので $- \circ S$ は全単射であるから, ある $a': \top_C \rightarrow P$ が存在して $a = a' \circ S$ が成り立つ. したがって $\alpha = i_S(a' \circ S) = i_{\top_C} a'$ であるから, i_{\top_C} が全射であることが示された. 命題 2 によって i_{\top_C} はすでに単射なので, i_{\top_C} は全単射である.

逆に, 任意の対象 C に対して i_{\top_C} が全単射であると仮定する. 任意に被覆篩 $S \in JC$ をとり, さらに射 $a: S \rightarrow P$ をとり. 仮定から i_{\top_C} が全単射なので, ある $a': \top_C \rightarrow P$ が存在して $i_S a = i_{\top_C} a'$ が成り立つ. これは, P^+C において a, a' が同値であるということなので, ある被覆篩 $T \in JC$ が存在し, $T \subseteq S$ であって,



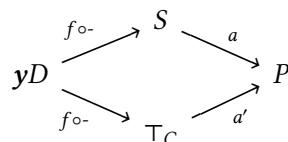
が可換である. ここで, 任意の射 $f \in S: D \rightarrow C$ に対し, 図式



を考えると, 左の四角形は f^*T の定義によって可換であり, 上下の三角形は明らかに可換で, 折れ曲がった長方形は上の図式と同じものなので可換である. したがって, 横に長い長方形も可換である. ここで, 命題 2 によって P が分離前層であることは分かっているので, 写像

$$- \circ f^*T: \text{Hom}(yD, P) \rightarrow \text{Hom}(f^*T, P)$$

は単射である. この事実と上の図式の可換性を踏まえると,



が可換であることが分かる. この図式において id_D の行き先を見ることで, $a_D f = a'_D f$ が得られる. f は S に属する任意の射であったから, これによって $a = a' \circ S$ が得られ, $- \circ S$ が全射であることが示された. 命題 2 によって $- \circ S$ はすでに単射なので, $- \circ S$ は全単射となり, P は層である.

前層 P に対して定義した射 $\eta_P: P \rightarrow P^+$ は, 層への射に関して普遍性をもつ. これが随伴性の鍵となる.

命題 4. 景 (\mathcal{C}, J) をとる. 前層 $P: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathbf{Set}$ と層 $F: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathbf{Set}$ に対し, 任意の自然変換 $\varphi: P \rightarrow F$ は,

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\eta_P} & P^+ \\ & \searrow \varphi & \downarrow \tilde{\varphi} \\ & & F \end{array}$$

を可換にする自然変換 $\tilde{\varphi}$ によって, η_P を通して一意的に分解される.

証明. 任意の対象 C とそれ上の被覆篩 $S \in JC$ をとる. F は層であるから, 包含射による写像

$$- \circ S: \text{Hom}(yC, F) \rightarrow \text{Hom}(S, F)$$

は全単射であり, したがって逆写像をもつ. これを用いて, 合成

$$\text{Hom}(S, P) \xrightarrow{\varphi \circ -} \text{Hom}(S, F) \xrightarrow{(- \circ S)^{-1}} \text{Hom}(yC, F) \xrightarrow{y_{FC}^{-1}} FC$$

を考えると, これらは関手 $\text{Hom}(-, P): JC^\circ \rightarrow \mathbf{Set}$ の余錐となる. したがって, この余極限である P^+C からの一意的な射 $\tilde{\varphi}_C: P^+C \rightarrow FC$ が存在する. これは C に関して自然なので, 自然変換 $\tilde{\varphi}: P^+ \rightarrow F$ が得られる.

さて, 定義によって, 各対象 C に対し,

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}(S, P) & \xrightarrow{\quad i_S \quad} & P^+C & & \\ & \searrow \varphi \circ - & \downarrow \tilde{\varphi}_C & & \\ & & \text{Hom}(S, F) & \xrightarrow{(- \circ S)^{-1}} & \text{Hom}(yC, F) & \xrightarrow{y_{FC}^{-1}} & FC \end{array}$$

は可換である. ここで特に $S = \top_C$ とおけば, 図式

$$\begin{array}{ccccc} PC & \xrightarrow{y_{PC}} & \text{Hom}(\top_C, P) & \xrightarrow{i_{\top_C}} & P^+C \\ \varphi_C \downarrow & & \varphi \circ - \downarrow & & \downarrow \tilde{\varphi}_C \\ FC & \xrightarrow{y_{FC}} & \text{Hom}(yC, F) & \xrightarrow{y_{FC}^{-1}} & FC \end{array}$$

の右側の四角形の可換性が得られるが, この左側の四角形も明らかに可換なので, 全体も可換である. これはすなわち, ここで構成した $\tilde{\varphi}: P^+ \rightarrow C$ が命題の主張の図式を可換にしていることを意味する.

$\tilde{\varphi}$ の一意性は, 余極限が誘導する射の一意性から従う.

定理 5. 景 (\mathcal{C}, J) をとる. 関手の随伴

$$\mathbf{PSh}(\mathcal{C}) \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \perp \\ \xleftarrow{i} \end{array} \mathbf{Sh}_J(\mathcal{C})$$

が成立する. すなわち, $\mathbf{Sh}_J(\mathcal{C})$ は $\mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ の反射的部分圏である.

証明. 前層 $P: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathbf{Set}$ に対し, 合成

$$P \xrightarrow{\eta_P} P^+ \xrightarrow{\eta_{P^+}} P^{++}$$

を $\bar{\eta}_P$ とおく．命題 4 を 2 回使うことで，任意の層 $F: \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathbf{Set}$ への自然変換 $\varphi: P \rightarrow F$ は，

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\bar{\eta}_P} & \mathbf{a}P \\ & \searrow \varphi & \downarrow \tilde{\varphi} \\ & & F \end{array}$$

を可換にする自然変換 $\tilde{\varphi}$ によって， $\bar{\eta}_P$ を通して一意的に分解される．これは，定理の主張にある随伴が， $\bar{\eta}$ を単位として成立することを意味する．

以上で，層化関手をプラス構成を経由して定義し，それが包含関手の左随伴になっていることを証明した．MacLane–Moerdijk^[1] ではこれを行うのに適合族やその融合を陽に扱っていたが，この日記では試しにそれを避けてみた．本当なら，プラス構成で用いた余極限の具体的な表示を使わずに，全て射だけの言葉で証明したかったが，あまりうまくいかず，中途半端な感じになってしまった*¹．この辺りの議論はもうちょっとシンプルにやりたい．

次回は，層の圏 $\mathbf{Sh}_J(\mathcal{C})$ の極限と余極限について触れる．

参考文献

- [1] S. MacLane, I. Moerdijk (1992) 『Sheaves in Geometry and Logic』 Springer

*¹ つらい．