Kripke–Joyal 意味論

Ziphil Aleshlas

2017 年 12 月 24 日

目次

1. 初めに

この記事の目的は，トポス上に定義される直観主義述語論理の意味論を定義し，それのいくつかの応用を述べることである．トポスの基本的な性質については既知とするので，適宜 Borceux[1]，Johnstone[2]，MacLane–Moerdijk[3] などを参照すること．

2. 記号の確認

この記事を通して使う用いる記号を列挙しておく．ほとんどは広く使われているものだが，一部この記事独自の記号を含む．

始域が等しい 2 つの射 $f\colon A \to B,\ g\colon A \to C$ が誘導する積への射を $(f,\ g)\colon A \to B \times C$ によって表す．終域が等しい 2 つの射 $f\colon A \to C,\ g\colon B \to C$ が誘導する余積からの射も $(f,\ g)\colon A + B \to C$ によって表す．また，ある対象 A から終対象への唯一の射は $!_A\colon A \to 1$ で表し，始対象からの唯一の射については $¡_A\colon 0 \to A$ で表す．

冪 B^A に関する随伴の余単位は $\mathrm{ev}_{AB}\colon B^A \times A \to B$ で表す．冪の随伴によって対応する射は,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(A \times B,\ C) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(A,\ C^B)\\ f &\longmapsto f^\sharp\\ g^\flat &\longleftarrow\!\shortmid\ g\end{aligned}$$

のように表す*1.

トポスの部分対象分類子は Ω で表し，対象 A の冪対象 (すなわち Ω^A) は PA によって表す．対象 A の部分対象全体は $\mathrm{Sub}(A)$ で表す．これは Heyting 代数の構造をもつのであった．また，$\mathrm{Sub}(A)$ と $\mathrm{Hom}(A,\ \Omega)$ の間には集合としての同型があるが，この同型によって対応するものを,

$$\begin{aligned}\mathrm{Sub}(A) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(A,\ \Omega)\\ M &\longmapsto \mathrm{char}(M)\\ \mathrm{sub}(f) &\longleftarrow\!\shortmid\ f\end{aligned}$$

で表す.

対象 A に対し，その対角射を $\Delta_A\colon A \rightarrowtail A \times A$ によって表す．また，Δ_A の特性射を $=_A\colon A \times A \to \Omega$ によって表し，さらに $=_A$ と冪の随伴で対応する射を $\{\}_A\colon A \rightarrowtail PA$ と書く.

Ω 自身は内部 Heyting 代数の構造をもつが，この構造に関して結びを表す射を $\wedge\colon \Omega \times \Omega \to \Omega$ と書く．同様に，交わりと含意を表す射はそれぞれ $\vee$ と $\Rightarrow$ で表す．さらに，最大元を表す射は $\top\colon 1 \to \Omega$ で表し，最小元を表す射については $\perp$ で表す.

*1 どちらの向きも $\widehat{f},\ \widehat{g}$ のようにハットを上につけて表すことが多いが，紛らわしいのでここでは記号を区別した.

任意の射 $f\colon A \to B$ は，部分対象全体の間の関手 $f^{-1}\colon \mathrm{Sub}(B) \to \mathrm{Sub}(A)$ を誘導する．この関手は左随伴と右随伴をともにもつが，左随伴は $\exists_f\colon \mathrm{Sub}(A) \to \mathrm{Sub}(B)$ で表すことにし，右随伴は $\forall_f$ で表すことにする．また，f は冪対象の間の射 $Pf\colon PB \to PA$ も誘導する．この射も同様に内部左随伴と内部右随伴をともにもち，内部左随伴は同じく $\exists_f\colon PA \to PB$ と書き，内部右随伴は $\forall_f$ と書く．また，f の像は $\mathrm{im}(f) \in \mathrm{Sub}(B)$ で表す．

集合と写像から成る圏を $\mathbf{Set}$ と書く*2．小圏 $\mathscr{C}$ に対し，それ上の前層 ($\mathbf{Set}$ への反変関手) と自然変換から成る圏を $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^\circ}$ で表す．$\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^\circ}$ に Grothendieck 位相 J が定義されているとき，この位相に関する層全体が成す $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^\circ}$ の充満部分圏を $\mathbf{Sh}_J(\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^\circ})$ で表す．層化関手を $\boldsymbol{a}\colon \mathbf{Set}^{\mathscr{C}^\circ} \to \mathbf{Sh}_J(\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^\circ})$ で表せば，これは包含関手 $i\colon \mathbf{Sh}_J(\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^\circ}) \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}^\circ}$ の左随伴である．また，集合をそれに値をもつ定値前層に送る関手 $\Delta\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}^\circ}$ は，前層をその大域切断全体に送る関手 $\Gamma\colon \mathbf{Set}^{\mathscr{C}^\circ} \to \mathbf{Set}$ の左随伴である．まとめると，随伴の図式

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set} \arrow[r, bend left, "\Delta"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Set}^{\mathscr{C}^\circ} \arrow[l, bend left, "\Gamma"] \arrow[r, bend left, "\boldsymbol{a}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Sh}_J(\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^\circ}) \arrow[l, bend left, "i"] \end{tikzcd}$$

が存在する．また，共変 Yoneda 埋め込みを $\boldsymbol{y}\colon \mathscr{C} \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}^\circ}$ で表す．

3.　意味論の定義

3.1.　Mitchell–Bénabou 言語

一般に (そしてほとんどの場合) トポスの対象は集合とは限らないので，そこから元を取り出すことはできない．そのため，集合に関する議論のときにしばしば行う，集合から元をとってそれに関する論理式によって集合の性質を記述するという方法が，トポスに対しては使うことができない．そこで，各対象に対してその元をあたかも表しているかのような変数を用意し，その変数を用いて論理式を書くことで，対象の性質を記述することを考える．このような方法を厳密に行うことを可能にするのが，Mitchell[4] などによって考案された Mitchell–Bénabou 言語である．

この節の定義は，MacLane–Moerdijk[3] と Osius[6] を参考に，多少の記号の変更を加えてある．

定義 1.　トポス $\mathscr{E}$ に対し，多類言語 $\mathfrak{L}(\mathscr{E})$ を以下で定義する．$\mathfrak{L}(\mathscr{E})$ の型は $\mathscr{E}$ の対象のことであるとし，それぞれの型に対して可算個の変数を用意する．$\mathfrak{L}(\mathscr{E})$ の項は以下によって再帰的に定義される．

[1] $\star$ は型 1 の項である．
[2] 型 T に対し，型 T の変項は型 T の項である．
[3] 射 $f\colon T \to R$ と型 T の項 τ に対し，$f \diamond \tau$ は型 R の項である．
[4] 型 T の項 τ と型 R の項 ρ に対し，(τ, ρ) は型 $T \times R$ の項である．

$\mathfrak{L}(\mathscr{E})$ の式は以下によって再帰的に定義される．

*2 special elementary topos の頭文字.

[1] false は論理式である．

[2] 型 T の項 τ, ρ に対し，$\tau = \rho$ は論理式である．

[3] 論理式 ψ, χ に対し，$\psi \wedge \chi$, $\phi \vee \chi$, $\phi \Rightarrow \chi$ は論理式である．

[4] 変項 y が論理式 ψ に自由に出現するとき，$\exists y.\ \psi$, $\forall y.\ \psi$ は論理式である*3．

以上で定義される言語 $\mathfrak{L}(\mathscr{E})$ を，$\mathscr{E}$ 上の **Mitchell–Bénabou 言語** (— language) という*4．

以下，トポス $\mathscr{E}$ を 1 つとって固定する．全ての対象や射は $\mathscr{E}$ 内のものであるとし，項や論理式は $\mathfrak{L}(\mathscr{E})$ のものであるとする．

変項 x や項 σ の型が A であることを，まとめて $x\colon A$ や $\sigma\colon A$ と書くことがある．また，項 σ に変項が自由出現するとき，そのことを明示して $\sigma(x)$ と書いたり，変項の型を明示して $\sigma(x\colon A)$ のように書くことがある．なお，このように書いたとき，σ に自由出現する変項が x のみであることは含意しないので注意すること．論理式に関しても同様の記法を用いる．

通常の論理式と同様に，以下のような略記形も用いる．ψ, χ は任意の式を表す．

$$\begin{aligned}
\neg\psi &\equiv \psi \Rightarrow \mathrm{false} \\
\mathrm{true} &\equiv \neg\mathrm{false} \\
\psi \Leftrightarrow \chi &\equiv (\psi \Rightarrow \chi) \wedge (\chi \Rightarrow \psi) \\
\exists! x.\ \psi(x) &\equiv \exists x.\ \psi(x) \wedge (\forall x'.\ \psi(x') \Rightarrow x = x')
\end{aligned}$$

また，集合論で用いる論理式と同様なものが書けるよう，以下のような記号も定義しておく．まず，任意の射 $t\colon 1 \to T$ に対し，

$$t^{\Diamond} \equiv t \diamond \star$$

と定義する．これは，集合の圏においては 1 から T への射をとることと T の元をとることは同じ操作であることから，1 から T への射と T を型にもつ項とを対応させているのである．次に，2 項 $\tau\colon T$, $\rho\colon PT$ に対し，

$$\tau \in \rho \equiv (\mathrm{ev}\colon PT \times T \to \Omega) \diamond (\rho,\ \tau) = \top^{\Diamond}$$

と定める．集合の圏では PT は T の部分集合全体なので，T の元 τ と PT の元 ρ があれば，ρ に τ が元として属しているかどうかに言及することができる．この式はそれの類推である．最後に，2 項 $\tau\colon T$, $\rho\colon R^T$ に対して，

$$\rho(\tau) \equiv (\mathrm{ev}\colon R^T \times T \to R) \diamond (\rho,\ \tau)$$

*4 $\exists y.\ \psi$ や $\forall y.\ \psi$ に含まれる $\exists y$ や $\forall y$ は，ψ に出現する変項 y を束縛する．束縛されていない変項が自由変項である．束縛変項や自由変項に関する厳密な定義はここでは省略する．

*4 Mitchell–Bénabou 言語の定義には様々なバリエーションがある．例えば MacLane–Moerdijk[3] では，項と論理式を区別せずに定義して，型 Ω をもつ項を特別に論理式と呼んでいる．また Mitchell[4] は，ある部分対象にある項が属しているかどうかを意味する論理式を上の定義に加えている．ここでは Osius[6] の流儀に倣った．

と定義する．集合の圏では R^T は T から R への関数全体なので，T の元 τ と R^T の元 ρ があれば，ρ による τ の像が R の元として得られる．この項はそれの類推である．

射 $f\colon A \to B$ は冪の随伴により $f^\sharp\colon 1 \to B^A$ と対応するが，$f^{\sharp\Diamond}$ を単に $f^\Diamond$ と書くことにする．また，部分対象 $M \in \mathrm{Sub}(A)$ は部分対象分類子に関する同型と冪の随伴により $\mathrm{char}(M)^\sharp\colon 1 \to PA$ と対応するが，$\mathrm{char}(M)^{\sharp\Diamond}$ も単に $M^\Diamond$ と書くことにする．

3.2. トポス上の解釈

前項で論理式を記述するための言語が準備できたので，次はそれぞれの項や論理式の意味を定義する．これから定義する意味論では，言語の項や論理式はトポス上の射に解釈される．

以下，$x_1, \cdots, x_n$ などのような同じ文字で表される複数個の記号の羅列を，簡単に $\vec{x}$ と書く．また，$A_1 \times \cdots \times A_n$ ($n = 0$ のときは 1) などのような同じ文字による積も，同様に $\vec{A}$ と書く．

定義 2. 項 $\sigma\colon S$ に出現する全ての変項が，$x_1\colon A_1, \cdots, x_n\colon A_n$ ($n \geq 0$) のうちのいずれかであるとする ($\vec{x}$ の中に σ に出現しないものがあっても良い)．このとき，射 $[\![\vec{x} \mid \sigma]\!]\colon \vec{A} \to S$ を σ の構造に関して以下のように再帰的に定義する．

[1] $[\![\vec{x} \mid \star]\!] = (!\colon \vec{A} \to 1)$.

[2] 各 i に対し，$[\![\vec{x} \mid x_i]\!] = (\mathrm{pr}\colon \vec{A} \to A_i)$.

[3] 射 $f\colon T \to R$ と項 $\tau\colon T$ に対し，$[\![\vec{x} \mid f \diamond \tau]\!] = f \circ [\![\vec{x} \mid \tau]\!]$.

[4] 項 $\tau\colon T$, $\rho\colon R$ に対し，$[\![\vec{x} \mid (\tau, \rho)]\!] = ([\![\vec{x} \mid \tau]\!], [\![\vec{x} \mid \rho]\!])$.

ここで，$[\![\vec{x} \mid \sigma]\!]$ は σ の $\vec{A}$ 上の**解釈** (interpretation) という．

定義 3. 論理式 φ に自由出現する全ての変項が，$x_1\colon A_1, \cdots, x_n\colon A_n$ ($n \geq 0$) のうちのいずれかであるとする ($\vec{x}$ の中に φ に自由出現しないものがあっても良い)．このとき，射 $[\![\vec{x} \mid \varphi]\!]\colon \vec{A} \to \Omega$ を φ の構造に関して以下のように再帰的に定義する．

[1] $[\![\vec{x} \mid \mathrm{false}]\!] = (\bot\colon 1 \to \Omega) \circ (!\colon \vec{A} \to 1)$.

[2] 項 $\tau\colon T$, $\rho\colon R$ に対し，$[\![\vec{x} \mid \tau = \rho]\!] = =_T \circ ([\![\vec{x} \mid \tau]\!], [\![\vec{x} \mid \rho]\!])$.

[3] 論理式 ψ, χ に対し，$[\![\vec{x} \mid \psi \wedge \chi]\!] = \wedge \circ ([\![\vec{x} \mid \psi]\!], [\![\vec{x} \mid \chi]\!])$ とし，その他の論理演算子に関しても同様に定める．

[4] 変項 $y\colon B$ が論理式 ψ に自由に出現するとき，$[\![\vec{x} \mid \exists y.\ \psi]\!] = \exists_{!_B} \circ [\![\vec{x} \mid \psi]\!]$ とし，全称量化子に関しても同様に定める．

ここで，$[\![\vec{x} \mid \varphi]\!]$ は φ の $\vec{A}$ 上の**解釈** (interpretation) という．

論理式の解釈は Ω への射であるから，これはある部分対象を 1 つ定める．

定義 4.　論理式 φ に自由出現する全ての変項が，$x_1\colon A_1, \cdots, x_n\colon A_n$ $(n \geq 0)$ のうちのいずれかであるとする．このとき，$\vec{A}$ の部分対象を，

$$\{\vec{x} \mid \varphi\} = \mathrm{char}(\llbracket \vec{x} \mid \varphi \rrbracket)$$

とおく．ここで，$\{\vec{x} \mid \varphi\}$ を φ の $\vec{A}$ 内の**外延** (extension) という．

上の定義において，論理式 φ の外延は，集合論では φ を満たす $\vec{A}$ の元全体の集合に対応するものである．

以上により，例えば

$$\{f\colon B^A \mid \forall y\colon B.\ \exists x\colon A.\ f(x) = y\}$$

などの表現に厳密な意味が与えられたことになる．すなわち，トポスのある対象があたかも何らかの元全体の集合であるかのように扱うことができ，その元が満たすべき性質を論理式で記述することによって，それを満たす元全体から成るような部分対象を 1 つ定めることができるのである．

補題 5.　論理式 φ, ψ に自由出現する変項が $x_1\colon A_1, \cdots, x_n\colon A_n$ $(n \geq 0)$ のいずれかであるとき，

$$\{\vec{x} \mid \varphi \wedge \psi\} = \{\vec{x} \mid \varphi\} \cap \{\vec{x} \mid \psi\}$$

が成り立つ．ここで，$\cap$ は $\mathrm{Sub}(\vec{A})$ に定義される Heyting 代数としての交わりを表す．また，他の論理演算子に関しても同様の結果が成り立つ．

補題 6.　論理式 φ に自由出現する変項が $x_1\colon A_1, \cdots, x_n\colon A_n,\ y\colon B$ $(n \geq 0)$ のいずれかであるとし，φ 内に $y\colon B$ は実際に自由出現しているものとする．このとき，

$$\{\vec{x} \mid \exists y.\ \varphi\} = \exists_\pi \{\vec{x},\ y \mid \varphi\}$$

が成り立つ．ここで，$\pi\colon \vec{A} \times B \to \vec{A}$ は積の射影で，$\exists_\pi\colon \mathrm{Sub}(\vec{A} \times B) \to \mathrm{Sub}(\vec{A})$ は π^{-1} の左随伴である．また，全称量化子に関しても同様の結果が成り立つ．

この 2 つの補題は，解釈と外延の定義から直ちに導かれる．

項と論理式の解釈について，いくつか便利な補題を用意しておく．

補題 7.　項 $\sigma\colon S$ に自由出現する全ての変項が，$x_1\colon A_1, \cdots, x_n\colon A_n, \cdots, x_{n+k}\colon A_{n+k}$ $(n, k \geq 0)$ のうちのいずれかであるとする．さらに，σ の中に $x_{n+1}, \cdots, x_{n+k}$ は実際には自由出現していないとする．このとき，

$$\llbracket x_1, \cdots, x_{n+k} \mid \sigma \rrbracket = \llbracket x_1, \cdots, x_n \mid \sigma \rrbracket \circ \pi$$

が成り立つ．ここで，$\pi\colon A_1 \times \cdots \times A_{n+k} \to A_1 \times \cdots \times A_n$ は積の射影である．同様のことが論理式に対しても成り立つ．

補題 8.　項 $\sigma\colon S$ に自由出現する全ての変項が，$x_1\colon A_1,\ \cdots,\ x_n\colon A_n\ (n \geq 0)$ のうちのいずれかであるとする．また，s を $1, \cdots, n$ の置換とする．このとき，

$$[\![x_1,\ \cdots,\ x_n \mid \sigma]\!] = [\![x_{s(1)},\ \cdots,\ x_{s(n)} \mid \sigma]\!] \circ \theta$$

が成り立つ．ここで，$\theta\colon A_1 \times \cdots \times A_n \to A_{s(1)} \times \cdots \times A_{s(n)}$ は積の順番を入れ替える同型射である．同様のことが論理式に対しても成り立つ．

この 2 つの補題は，σ の構造に関する帰納法で容易に示せる．

補題 9.　項 $\sigma\colon S$ に自由出現する全ての変項が，$x_1\colon A_1,\ \cdots,\ x_n\colon A_n,\ y\colon B\ (n \geq 0)$ のうちのいずれかであるとし，σ 内に $y\colon B$ は実際に自由出現しているものとする．また，項 $\tau\colon B$ に自由出現する全ての変項も，$x_1,\ \cdots,\ x_n$ のうちのいずれかであるとする．さらに，τ に出現する変項は σ 内で束縛されていないと仮定する．このとき，

$$[\![x_1,\ \cdots,\ x_n \mid \sigma[y \coloneqq \tau]]\!] = [\![x_1,\ \cdots,\ x_n,\ y \mid \sigma]\!] \circ [\![x_1,\ \cdots,\ x_n \mid (x_1,\ \cdots,\ x_n,\ \tau)]\!]$$

が成り立つ．ここで，$\sigma[y \coloneqq \tau]$ は σ 内に自由出現している y を全て τ に置き換えて得られる項である．同様のことが論理式に対しても成り立つ．

この補題も，σ の構造に関する帰納法で示せる．ただし，証明には Beck–Chevalley 条件が必要であることに留意すること．

項 σ に自由出現する変項がちょうど $x_1\colon A_1,\ \cdots,\ x_n\colon A_n$ であるとき，$[\![\vec{x} \mid \sigma]\!]$ が定義され，これの始域は $A_1 \times \cdots \times A_n$ になる．このことから，以降，σ の始域が $A_1 \times \cdots \times A_n$ であるとも言うことにする[*5]．論理式に関しても同様の用語を用いる．

3.3.　Kripke–Joyal 意味論 — 一般のトポス上

式のトポス上での解釈が定まったところで，次に論理式が成り立つもしくは成り立たないということを定義する．

定義 10.　始域 $\vec{A}$ の論理式 $\varphi(\vec{x})$ に対し，図式

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[d, tail, "\top"] \\ \vec{A} \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "{[\![\vec{x} \mid \varphi(\vec{x})]\!]}"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

を可換にするような破線の射が存在するとき，$\varphi(\vec{x})$ は恒真 (univarsally valid) であるといい，$\Vdash \varphi(\vec{x})$ と書く．

[*5] MacLane–Moerdijk[3] は，この始域のことを源 (source) と呼んでいる．

論理式が恒真でなくとも，論理式の中に現れる変項 (例えば $x\colon A$) に何らかの値を代入すれば成り立つということを述べたい場合もある．ここで，その値とは何なのかを考える必要がある．集合論上で考えるなら，その値とは A の元 α であるが，これは 1 から A への射 $\alpha\colon 1 \to A$ と同一視できる．したがって，変項に代入される何らかの値としては，1 からの射を考えれば良いことになる．ここでは，さらに一般化して，任意の対象からの射を考えることにする．

定義 11. 始域 $\vec{A}$ の論理式 $\varphi(\vec{x})$ と射 $\vec{\alpha}\colon U \to \vec{A}$ に対し，図式

$$\begin{tikzcd} & \{\vec{x} \mid \varphi(\vec{x})\} \arrow[d, hook] \\ U \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\vec{\alpha}"'] & \vec{A} \end{tikzcd}$$

を可換にするような破線の射が存在するとき，U は $\varphi(\vec{\alpha})$ を**強制する** (force) といい，$U \Vdash \varphi(\vec{\alpha})$ と書く[*6]．

上の定義で $U = 1$ とすると，$\vec{\alpha}\colon 1 \to \vec{A}$ が $\{\vec{x} \mid \varphi(\vec{x})\}$ を経由するとは，$\vec{\alpha}$ を $\vec{A}$ の元と見なしたときに $\{\vec{x} \mid \varphi(\vec{x})\}$ に属するということで，$\{\vec{x} \mid \varphi(\vec{x})\}$ は $\varphi(\vec{x})$ を満たす $\vec{A}$ の元全体の集合に対応しているから，これはまさに $\vec{\alpha}$ が $\varphi(\vec{x})$ を満たすことを意味している．

Mitchell–Bénabou 言語の論理式は，2 つの項を等号や所属関係で結んだ最も原始的な論理式を，$\wedge$ などの論理演算子や $\exists$ などの量化子で組み合わせて作られる．したがって，ある論理式の強制関係を，論理演算子や量化子によって組み合わせる前の論理式の強制関係で記述できれば，論理式を順に分解していくことで，原始的な論理式のみの強制関係を考えるだけで済む．これを可能にするのが，次に示す 2 つの定理である．

定理 12. 始域 A の論理式 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ と射 $\alpha\colon U \to A$ をとる．連言について，

- $U \Vdash \varphi(\alpha) \wedge \psi(\alpha)$ が成り立つ．
- $U \Vdash \varphi(\alpha)$ および $U \Vdash \psi(\alpha)$ がともに成り立つ．

は同値である．選言について，

- $U \Vdash \varphi(\alpha) \vee \psi(\alpha)$ が成り立つ．
- ある射 $p\colon V \to U$ と $q\colon W \to U$ が存在し，$(p, q)\colon V + W \to U$ は全射で，さらに $V \Vdash \varphi(\alpha \circ p)$ および $W \Vdash \psi(\alpha \circ q)$ がともに成り立つ．

は同値である．含意について，

- $U \Vdash \varphi(\alpha) \Rightarrow \psi(\alpha)$ が成り立つ．

[*6] 射 $\vec{\alpha}\colon U \to \vec{A}$ という表現は，n 本の射 $\alpha_1\colon U \to A_1, \cdots, \alpha_n\colon U \to A_n$ の羅列を略記したものとも捉えられるし，1 本の射 $\vec{\alpha}\colon U \to A_1 \times \cdots \times A_n$ において終域を略記したものとも捉えられる．この 2 つはどちらも同じことを述べているので，意味が曖昧になる可能性はない．以降もこのような同一視を行う．

- 任意の射 $p\colon V \to U$ に対し，$V \Vdash \varphi(\alpha \circ p)$ が成り立つならば $V \Vdash \psi(\alpha \circ p)$ が成り立つ．

は同値である．否定について，

- $U \Vdash \neg\varphi(\alpha)$ が成り立つ．
- 任意の射 $p\colon V \to U$ に対し，$V \Vdash \varphi(\alpha \circ p)$ が成り立つならば $V \cong 0$ が成り立つ．

は同値である．さらに，φ と ψ の自由変数が 2 つ以上の場合でも，これらの結果と同様のことが成り立つ．

書くだけ．ノートの p5600 から p5603 までを参照．

定理 13. 始域 $A \times B$ の論理式 $\varphi(x, y)$ と射 $\alpha\colon U \to A$ をとる．存在量化について，

- $U \Vdash \exists y.\ \varphi(\alpha, y)$ が成り立つ．
- ある全射 $p\colon V \twoheadrightarrow U$ と射 $\beta\colon V \to B$ が存在して，$V \Vdash \varphi(\alpha \circ p, \beta)$ が成り立つ．

は同値である．全称量化について，

- $U \Vdash \forall y.\ \varphi(\alpha, y)$ が成り立つ．
- 任意の射 $p\colon V \to U$ と射 $\beta\colon V \to B$ に対して，$V \Vdash \varphi(\alpha \circ p, \beta)$ が成り立つ．
- $U \times B \Vdash \varphi(\alpha \circ \pi_1, \pi_2)$ が成り立つ．

は全て同値である．ここで，$\pi_1\colon U \times B \to U$ および $\pi_2\colon U \times B \to B$ はともに積の射影である．さらに，φ の y 以外の自由変数が 1 つ以外の場合でも，これらの結果と同様のことが成り立つ．

書くだけ．ノートの p5603 から p5604 までを参照．

等号に関しては，以下のことが成り立つ．

定理 14. 始域 $\vec{A}$ の論理式 $\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x})$ と射 $\vec{\alpha}\colon U \to \vec{A}$ をとる．このとき，

- $U \Vdash \varphi(\vec{\alpha}) = \psi(\vec{\alpha})$ が成り立つ．
- $[\![\vec{x} \mid \varphi(\vec{x})]\!] \circ \vec{\alpha} = [\![\vec{x} \mid \psi(\vec{x})]\!] \circ \vec{\alpha}$ が成り立つ．

は同値である．

書くだけ．ノートの p5605 を参照すれば良いが，正直自明．

3.4. Kripke–Joyal 意味論 — Grothendieck トポス上

書くだけ．ノートの p5613 から p5615 までを参照．

4.　各種概念の特徴付け

4.1.　部分対象の引き戻し, 像

Mitchell–Bénabou 言語を用いて，トポスの様々な概念の特徴づけを行う．この節全体を通して，ほぼ全ての命題を Osius[6] から引用したが，証明は Kripke–Joyal 意味論に基づいた全く別のものを与えている．

まず初めに，この項で用いるいくつかの補題を用意しておく．

> **補題 15.**　射 $f\colon A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ $(n \geq 0)$ に対し，
>
> $$[\![x_1\colon A_1, \cdots, x_n\colon A_n \mid f^{\Diamond}(x_1, \cdots, x_n)]\!] = f$$
>
> が成り立つ．

簡単のため $n = 1$ の場合 $(x = x_1,\ A = A_1$ とする$)$ の証明を述べるが，それ以外の場合でも同様である．

解釈の定義により，

$$\begin{aligned}
[\![x \mid f^{\Diamond}(x)]\!] &= \mathrm{ev}_{AB} \circ ([\![x \mid f^{\Diamond}]\!], [\![x \mid x]\!]) \\
&= \mathrm{ev}_{AB} \circ (f^{\sharp} \circ !_A, \mathrm{id}_A) \\
&= \mathrm{ev}_{AB} \circ (f^{\sharp} \times \mathrm{id}_A) \circ (!_A, \mathrm{id}_A) \\
&= f
\end{aligned}$$

と計算できるので，示された．

> **補題 16.**　部分対象 $M \in \mathrm{Sub}(A_1 \times \cdots \times A_n)$ $(n \geq 0)$ に対し，
>
> $$[\![x_1\colon A_1, \cdots, x_n\colon A_n \mid (x_1, \cdots, x_n) \in M^{\Diamond}]\!] = \mathrm{char}(M)$$
>
> および
>
> $$\{x_1\colon A_1, \cdots, x_n\colon A_n \mid (x_1, \cdots, x_n) \in M^{\Diamond}\} = M$$
>
> が成り立つ．

簡単のため $n = 1$ の場合 $(x = x_1,\ A = A_1$ とする$)$ の証明を述べるが，それ以外の場合でも同様である．また，2 つ目の式は 1 つ目の式からすぐに従うので，1 つ目の式のみを示す．

おそらくすぐできる．

> **命題 17.**　射 $f\colon A \to B$ および部分対象 $N \in \mathrm{Sub}(B)$ に対し，
>
> $$f^{-1}N = \{x\colon A \mid f^{\Diamond}(x) \in N^{\Diamond}\}$$

が成り立つ．

両辺の部分対象に対応する Ω への射を考えて，

$$\mathrm{char}(N) \circ f = [\![x \mid f^{\Diamond}(x) \in N^{\Diamond}]\!]$$

を示せば良い．ここで右辺は，解釈の定義と補題 15 を用いて，

$$\begin{aligned}
[\![x \mid f^{\Diamond}(x) \in N^{\Diamond}]\!] &= \mathrm{ev}_{B\Omega} \circ ([\![x \mid N^{\Diamond}]\!], [\![x \mid f^{\Diamond}(x)]\!]) \\
&= \mathrm{ev}_{B\Omega} \circ (\mathrm{char}(N)^{\sharp} \circ !_A,\ f) \\
&= \mathrm{ev}_{B\Omega} \circ (\mathrm{char}(N)^{\sharp} \times \mathrm{id}_B) \circ (!_A,\ f) \\
&= \mathrm{char}(N) \circ f
\end{aligned}$$

と変形できるから，示された．

命題 18. 射 $f\colon A \to B$ および部分対象 $M \in \mathrm{Sub}(A)$ に対し，

$$\exists_f M = \{y\colon B \mid \exists x\colon A.\ f^{\Diamond}(x) = y \land x \in M^{\Diamond}\}$$

が成り立つ．

$\exists_f$ は f^{-1} の左随伴だから，任意の $N \in \mathrm{Sub}(B)$ に対し，

$$\{y \mid \exists x.\ f^{\Diamond}(x) = y \land x \in M^{\Diamond}\} \subseteq N \iff M \subseteq f^{-1}N \tag{$\spadesuit$}$$

を示せば良い．ここで，

$$L \coloneqq \{y \mid \exists x.\ f^{\Diamond}(x) = y \land x \in M^{\Diamond}\}$$

とおくと，式 $\spadesuit$ の左側の主張は，

> 任意の射 $\beta\colon U \to B$ に対して，$\mathrm{im}(\beta) \subseteq L$ ならば $\mathrm{im}(\beta) \subseteq N$ が成り立つ．

と同値である．ここで，各 $\beta\colon U \to B$ に対して，

> $U \Vdash \exists x.\ f^{\Diamond}(x) = \beta \land x \in M^{\Diamond}$ が成り立つ．

が成り立つということは，定理 13 によって，

> ある全射 $p\colon V \twoheadrightarrow U$ と射 $\alpha\colon V \to A$ が存在して，$V \Vdash f^{\Diamond}(\alpha) = \beta \circ p \land \alpha \in M^{\Diamond}$ が成り立つ．

と同値である．これは，さらに定理 12 を用いることで，

> ある全射 $p\colon V \twoheadrightarrow U$ と射 $\alpha\colon V \to A$ が存在して，$V \Vdash f^{\Diamond}(\alpha) = \beta \circ p$ および $V \Vdash \alpha \in M^{\Diamond}$ がともに成り立つ．

とも同値であることが分かる．さらに，上主張において，定理 14 と補題 15 を用いれば，

$$V \Vdash f^{\Diamond}(\alpha) = \beta \circ p \iff [\![x \mid f^{\Diamond}(x)]\!] \circ \alpha = [\![y \mid y]\!] \circ (\beta \circ p)$$

$$\iff f \circ \alpha = \beta \circ p$$

が分かる．さらに，補題 16 によって，

$$\begin{aligned} V \Vdash \alpha \in M^{\Diamond} &\iff \mathrm{im}(\alpha) \subseteq \{x \mid x \in M^{\Diamond}\} \\ &\iff \mathrm{im}(\alpha) \subseteq M \end{aligned}$$

も分かる．以上の議論を全てまとめれば，式 ♤ の左側の主張は，

> 任意に射 $\beta\colon U \to B$ をとる．今，ある全射 $p\colon V \twoheadrightarrow U$ と射 $\alpha\colon V \to A$ が存在して，$f \circ \alpha = \beta \circ p$ および $\mathrm{im}(\alpha) \subseteq M$ がともに成り立っているとする．このとき，$\mathrm{im}(\beta) \subseteq N$ が成り立つ．

と同値であることが示された．以上のことを踏まえて，式 ♤ を示す．

式 ♤ の左側の主張を仮定する．$\alpha\colon M \rightarrowtail A$ を部分対象を与える射とする．$\beta = f \circ \alpha$ および $p = \mathrm{id}_A$ とおくと，$f \circ \alpha = \beta \circ p$ および $\mathrm{im}(\alpha) \subseteq M$ が明らかに成り立つ．したがって仮定より，

$$\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(f \circ \alpha) \subseteq N$$

が成り立つ．このことは，図式

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, tail] \\ M \arrow[ur, dashed, "u"] \arrow[r, "f\circ\alpha"'] & B \end{tikzcd}$$

を可換にする $u\colon M \to N$ が存在することを意味している．さらに，可換図式

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "u"] \arrow[ddr, tail, bend right, "\alpha"'] & & \\ & f^{-1}N \arrow[r] \arrow[d, tail] & N \arrow[d, tail] \\ & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

において，f^{-1} の定義より上の図式の右下の四角形部分は引き戻しだから，その普遍性により破線の射が存在する．これは $M \subseteq f^{-1}N$ を意味する．

逆に $M \subseteq f^{-1}N$ を仮定する．任意に射 $\beta\colon U \to B$ をとり，ある全射 $p\colon V \twoheadrightarrow U$ と射 $\alpha\colon V \to A$ が $f \circ \alpha = \beta \circ p$ および $\mathrm{im}(\alpha) \subseteq M$ を満たしているとする．p は全射だから，

$$\mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\beta \circ p) = \mathrm{im}(f \circ \alpha) \qquad [\heartsuit]$$

が成り立つ．一方で，$\mathrm{im}(\alpha) \subseteq M \subseteq f^{-1}N$ だから，α は $f^{-1}N$ を経由する．すなわち，図式

$$\begin{tikzcd} U \arrow[dr, "v"] \arrow[ddr, tail, bend right, "\alpha"'] & & \\ & f^{-1}N \arrow[r] \arrow[d, tail] & N \arrow[d, tail] \\ & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

において射 $v\colon U \to f^{-1}N$ が存在する．このことから，$f \circ \alpha$ は N を経由するから，$\mathrm{im}(f \circ \alpha) \subseteq N$ が成り立つ．式 ♡ と合わせれば $\mathrm{im}(\beta) \subseteq N$ が得られ，式 ♤ の左側の主張が示された．

> **命題 19.**　射 $f\colon A \to B$ および部分対象 $M \in \mathrm{Sub}(A)$ に対し，
>
> $$\forall_f M = \{y\colon B \mid \forall x\colon A.\ f^{\Diamond}(x) = y \Rightarrow x \in M^{\Diamond}\}$$
>
> が成り立つ．

$\forall_f$ は f^{-1} の右随伴だから，任意の $N \in \mathrm{Sub}(B)$ に対し，

$$N \subseteq \{y \mid \forall x.\ f^{\Diamond}(x) = y \Rightarrow x \in M^{\Diamond}\} \iff f^{-1}N \subseteq M \qquad [♤]$$

を示せば良い．この左側の主張を定理 18 の証明のときと同様にして言い換えれば，

> 任意に射 $\beta\colon U \to B$ をとり，$\mathrm{im}(\beta) \subseteq N$ とする．このとき，任意の射 $p\colon V \to U$ と射 $\alpha\colon V \to A$ に対し，$f \circ \alpha = \beta \circ p$ ならば $\mathrm{im}(\alpha) \subseteq M$ が成り立つ．

となる．

まず，上の主張を仮定する．$\beta\colon N \rightarrowtail B$ を部分対象を与える射とすると，明らかに $\mathrm{im}(\beta) \subseteq N$ である．さらに，p と α を引き戻しの図式

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}N \arrow[r, "p"] \arrow[d, tail, "\alpha"'] & N \arrow[d, tail, "\beta"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

にあるように定めると，$f \circ \alpha = \beta \circ p$ が成り立つ．したがって仮定より，

$$f^{-1}N = \mathrm{im}(\alpha) \subseteq M$$

が成り立つ．

逆に $f^{-1}N \subseteq M$ を仮定する．任意に射 $\beta\colon U \to B$ であって $\mathrm{im}(\beta) \subseteq N$ なるものをとり，さらに射 p: $V \to U$ と $\alpha\colon V \to A$ が $f \circ \alpha = \beta \circ p$ を満たしているとする．$\mathrm{im}(\beta) \subseteq N$ であるから，図式

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[d, tail] \\
U \arrow[ur, dashed, "u"] \arrow[r, "\beta"'] & B
\end{tikzcd}$$

を可換にする $u\colon U \to N$ が存在する．これにより，さらに図式

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "u \circ p"] \arrow[ddr, tail, bend right, "\alpha"'] & & \\
 & f^{-1}N \arrow[r] \arrow[d, tail] & N \arrow[d, tail] \\
 & A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

を可換にする破線の射が存在する．これは $\mathrm{im}(\alpha) \subseteq f^{-1}N$ を意味するが，仮定から $f^{-1}N \subseteq M$ なので，$\mathrm{im}(\alpha) \subseteq M$ が成り立つ．これにより，式 ♤ の左側の主張が示された．

命題 20. 射 $f\colon A \to B$ に対し，

$$\mathrm{im}(f) = \{y\colon B \mid \exists x\colon A.\ f^{\Diamond}(x) = y\}$$

が成り立つ．

$\mathrm{im}(f) = \exists_f A$ だから，命題 18 によって，

$$\mathrm{im}(f) = \{y \mid \exists x.\ f^{\Diamond}(x) = y \wedge x \in A^{\Diamond}\}$$

であるが，論理式 $x \in A^{\Diamond}$ は恒真なので，命題の主張が従う．常に内部的に同値となる論理式があれば，その外延が一致することは示すべき．

4.2. 一意存在像

射 $f\colon A \to B$ があると，論理の存在量化子に関係する関手 $\exists_f$ が定まるが，一意存在量化子に関係する関手も定めることができる．

定義 21. 射 $f\colon A \to B$ を考える．各部分対象 $M \in \mathrm{Sub}(A)$ に対し，これを与える単射を $m\colon M \rightarrowtail A$ とし，引き戻し

$$\begin{tikzcd}
\exists!_f M \arrow[rr, dashed] \arrow[d, dashed, tail] & & M \arrow[d, tail, "\{\}_M"] \\
B \arrow[r, "\{\}_B"'] & PB \arrow[r, "P(f\circ m)"'] & PM
\end{tikzcd}$$

によって $\exists!_f M \in \mathrm{Sub}(B)$ を定める．この操作によって定まる関手 $\exists!_f\colon \mathrm{Sub}(A) \to \mathrm{Sub}(B)$ を f による**一意存在関手** (unique existence functor) という．

この一意存在関手に関しても，命題 18 と同様の結果が成り立つ．

命題 22. 射 $f\colon A \to B$ および部分対象 $M \in \mathrm{Sub}(A)$ に対し，

$$\exists_f M = \{y\colon B \mid \exists x\colon A.\ f^{\Diamond}(x) = y \wedge x \in M^{\Diamond}\}$$

が成り立つ．

ノートの p5695 から p5698 までを参照．ただし，半分しか証明ができていない．

さらに，補題 6 と同様の結果も成り立つ．

補題 23. 論理式 φ に自由出現する変項が $x_1\colon A_1, \cdots, x_n\colon A_n,\ y\colon B\ (n \geq 0)$ のいずれかであるとし，φ

内に $y\colon B$ は実際に自由出現しているものとする．このとき，

$$\{\vec{x} \mid \exists! y.\ \varphi\} = \exists!_{\pi}\{\vec{x},\ y \mid \varphi\}$$

が成り立つ．ここで，$\pi\colon \vec{A}\times B \to \vec{A}$ は積の射影である．

ノートの p5699 を参照.

4.3. 単射, 全射, 同型射

命題 24. 射 $f\colon A \to B$ に対し，f が単射であるための必要十分条件は，

$$1 \Vdash \forall x\colon A.\ \forall x'\colon A.\ f^{\Diamond}(x) = f^{\Diamond}(x') \Rightarrow x = x'$$

が成り立つことである．

命題にある強制関係は，定理 12, 13, 14 などを用いることで，

任意の射 $\alpha, \alpha'\colon U \to A$ に対して，$f\circ\alpha = f\circ\alpha'$ ならば $\alpha = \alpha'$ が成り立つ．

という主張と同値になるが，これはまさに f が単射であることを述べている．

命題 25. 射 $f\colon A \to B$ に対し，f が全射であるための必要十分条件は，

$$1 \Vdash \forall y\colon B.\ \exists x\colon A.\ f^{\Diamond}(x) = y$$

が成り立つことである．

f が全射とは，$B \subseteq \mathrm{im}(f)$ が成り立つということである．このことは，

任意の射 $\beta\colon U \to B$ に対して，$\mathrm{im}(\beta) \subseteq \mathrm{im}(f)$ が成り立つ．

と同値であるが，定理 20 により，

任意の射 $\beta\colon U \to B$ に対して，$U \Vdash \exists x.\ f^{\Diamond}(x) = \beta$ が成り立つ．

とも同値になる．定理 13 により，これは命題にある強制関係と同値である．

命題 26. 射 $f\colon A \to B$ に対し，f が同型射であるための必要十分条件は，

$$1 \Vdash \forall y\colon B.\ \exists! x\colon A.\ f^{\Diamond}(x) = y$$

が成り立つことである．

f が同型射であることは，f が単射かつ全射であることと同値である．命題 24, 25 によって，このことはさらに，

$$1 \Vdash \forall x\colon A.\ \forall x'\colon A.\ f^{\Diamond}(x) = f^{\Diamond}(x') \Rightarrow x = x'$$

$$1 \Vdash \forall y\colon B.\ \exists x\colon A.\ f^{\diamond}(x) = y$$

がともに成り立つこととも同値である．定理 12, 13, 14 などを用いてこれらの論理式を分解すると，これらの 2 つの強制関係が命題の強制関係と同値であることが分かる．

一意存在関手に関する性質を使えば，わりと簡単に証明できるかもしれない．

4.4. 冪の随伴

補題 27. 射 $f, g\colon A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ $(n \geq 0)$ に対し，$f = g$ であるための必要十分条件は，

$$1 \Vdash \forall x_1\colon A_1.\ \cdots\ \forall x_n\colon A_n.\ f^{\diamond}(x_1, \cdots, x_n) = g^{\diamond}(x_1, \cdots, x_n)$$

が成り立つことである．

簡単のため $n = 2$ の場合の証明を述べるが，それ以外の場合でも同様である．

定理 13 を複数回使うことで，補題の強制関係は，

任意の射 $\alpha_1\colon U \to A_1$, $\alpha_2\colon U \to A_2$ に対して，$U \Vdash f^{\diamond}(\alpha_1, \alpha_2) = g^{\diamond}(\alpha_1, \alpha_2)$ が成り立つ．

という主張と同値である．定理 14 と補題 15 によって，これは，

任意の射 $\alpha_1\colon U \to A_1$, $\alpha_2\colon U \to A_2$ に対して，$f \circ (\alpha_1, \alpha_2) = g \circ (\alpha_1, \alpha_2)$ が成り立つ．

とも同値である．そしてこれは，明らかに $f = g$ と同値である．

命題 28. 射 $f\colon A \to C^B$ と $g\colon A \times B \to C$ に対し，$f = g^{\sharp}$ (もしくは $f^{\flat} = g$) であるための必要十分条件は，

$$1 \Vdash \forall x\colon A.\ \forall y\colon B.\ f^{\diamond}(x)(y) = g^{\diamond}(x, y)$$

が成り立つことである．

補題 27 により，$f^{\flat} = g$ が成り立つことは，

$$1 \Vdash \forall x\colon A.\ \forall y\colon B.\ f^{\flat\diamond}(x, y) = g^{\diamond}(x, y)$$

と同値である．定理 13, 14 によって，これは

任意の射 $\alpha\colon U \to A$, $\beta\colon U \to B$ に対して，

$$[\![x, y \mid f^{\flat\diamond}(x, y)]\!] \circ (\alpha, \beta) = [\![x, y \mid f^{\diamond}(x)(y)]\!] \circ (\alpha, \beta)$$

が成り立つ．

という主張と同値だから，

$$[\![x, y \mid f^{\flat\diamond}(x, y)]\!] = [\![x, y \mid f^{\diamond}(x)(y)]\!]$$

を示せば良い．この等式は，補題 7, 15 を用いて計算すると，

$$\begin{aligned}
[\![x,\ y \mid f^{\diamond}(x)(y)]\!] &= \mathrm{ev}_{BC} \circ ([\![x,\ y \mid f^{\diamond}(x)]\!],\ [\![x,\ y \mid y]\!]) \\
&= \mathrm{ev}_{BC} \circ (f \circ (\mathrm{pr}\colon A \times B \to A),\ (\mathrm{pr}\colon A \times B \to B)) \\
&= \mathrm{ev}_{BC} \circ (f \times \mathrm{id}_B) \\
&= f^{\flat} \\
&= [\![x,\ y \mid f^{\flat\diamond}(x,\ y)]\!]
\end{aligned}$$

となって示される．

4.5. 言語による射の特定

集合論では，2 つの集合 A, B の間の写像を 1 つ定めたければ，各 A の元に対して B の元を唯一定めれば良い．Mitchell–Bénabou 言語を用いると，これと同様の方法でトポス内の射を定めることができる．

命題 29. 始域 $A \times B$ の論理式 $\varphi(x,\ y)$ に対し，

$$1 \Vdash \forall x\colon A.\ \exists! y\colon B.\ \varphi(x,\ y)$$

が成り立っているならば，ある射 $f\colon A \to B$ で，

$$1 \Vdash \forall x\colon A.\ \varphi(x,\ f^{\diamond}(x))$$

が成り立つようなものが唯一存在する．

ノートの p5692 から p5694 までを参照.

4.6. 射とグラフの対応

集合論においては，2 つの集合 A, B の間の写像は，その写像のグラフと呼ばれる，$A \times B$ の部分集合で特定の性質を示すもので定義されていた．トポスにおいても，同様の方法で写像を定めることができる．

定義 30. 射 $f\colon A \to B$ に対し，

$$\mathrm{graph}(f) = \{x\colon A,\ y\colon B \mid f^{\diamond}(x) = y\}$$

とおくとき，これを f のグラフ (graph) という．

補題 31. 射 $f\colon A \to B$ に対し，

$$\mathrm{graph}(f) = ((\mathrm{id},\ f)\colon A \rightarrowtail A \times B)$$

が成り立つ．

ノートの p5681 の右下の方に書いてある注釈を参照.

補題 32. 射 $f\colon A \to B$ に対し，

$$1 \Vdash \forall x\colon A.\ \exists! y\colon B.\ (x,\ y) \in \mathrm{graph}(f)^{\Diamond}$$

が成り立つ．

ノートの p5680 を参照.

補題 33. 部分対象 $M \in \mathrm{Sub}(A \times B)$ が

$$1 \Vdash \forall x\colon A.\ \exists! y\colon B.\ (x,\ y) \in M^{\Diamond}$$

を満たしているとする．このとき，射 $f\colon A \to B$ であって $\mathrm{graph}(f) = M$ を満たすものが唯一存在する．

ノートの p5681 を参照．ただし，半分しか証明ができていない.

命題 34. 対象 A, B に対し，

$$\mathrm{Graph}(A,\ B) = \{M \in \mathrm{Sub}(A,\ B) \mid 1 \Vdash \forall x\colon A.\ \exists! y\colon B.\ (x,\ y) \in M^{\Diamond}\}$$

とおくと，集合としての同型

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(A,\ B) &\longrightarrow \mathrm{Graph}(A,\ B) \\ f &\longmapsto \mathrm{graph}(f) \\ \mathrm{map}(M) &\longleftarrow\!\shortmid M \end{aligned}$$

が存在する．

部分対象 $M \in \mathrm{Sub}(A \times B)$ に対し，補題 33 で存在が保証されている射 f を $\mathrm{map}(M)$ と書くことにすれば，補題 32 と合わせて上記の同型が得られる．

4.7. 積, 等化子, 引き戻し

まだ先は長い.

4.8. 選択公理

ノートの p5610 から p5612 までの話をまとめたい.

5.　数の構成

5.1.　自然数対象

書くだけ．

5.2.　整数対象と有理数対象

演算まで全部書こうとすると気が遠くなるのでどうしようか．「やればできる」と書いてある文献しか見たことがないので，やってみても良いかもしれないが．

5.3.　Dedekind 実数対象

次に実数対象を構成する．集合論上で実数を構成するときにも様々な方法があるように，トポス上での実数対象の定義にも様々な方法がある．この項では，Dedekind 切断を用いたものを提示する．以下の定義は MacLane–Moerdijk[3] によるものである．

定義 35.　トポスが自然数対象をもつとする．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cut}_1(L\colon P\mathbb{Q},\ U\colon P\mathbb{Q}) &\equiv \exists q\colon \mathbb{Q}.\ q \in L \\
\mathrm{cut}_2(L\colon P\mathbb{Q},\ U\colon P\mathbb{Q}) &\equiv \exists r\colon \mathbb{Q}.\ r \in U \\
\mathrm{cut}_3(L\colon P\mathbb{Q},\ U\colon P\mathbb{Q}) &\equiv \forall q\colon \mathbb{Q}.\ \forall r\colon \mathbb{Q}.\ (q < r \wedge r \in L) \Rightarrow q \in L \\
\mathrm{cut}_4(L\colon P\mathbb{Q},\ U\colon P\mathbb{Q}) &\equiv \forall q\colon \mathbb{Q}.\ \forall r\colon \mathbb{Q}.\ (q > r \wedge r \in U) \Rightarrow q \in U \\
\mathrm{cut}_5(L\colon P\mathbb{Q},\ U\colon P\mathbb{Q}) &\equiv \forall q\colon \mathbb{Q}.\ q \in L \Rightarrow (\exists r\colon \mathbb{Q}.\ r \in L \wedge q < r) \\
\mathrm{cut}_6(L\colon P\mathbb{Q},\ U\colon P\mathbb{Q}) &\equiv \forall q\colon \mathbb{Q}.\ q \in U \Rightarrow (\exists r\colon \mathbb{Q}.\ r \in U \wedge q > r) \\
\mathrm{cut}_7(L\colon P\mathbb{Q},\ U\colon P\mathbb{Q}) &\equiv \forall q\colon \mathbb{Q}.\ \forall r\colon \mathbb{Q}.\ q < r \Rightarrow (q \in L \vee r \in U) \\
\mathrm{cut}_8(L\colon P\mathbb{Q},\ U\colon P\mathbb{Q}) &\equiv \neg(q \in L \wedge q \in U)
\end{aligned}
$$

とおき，これらを全て $\wedge$ で繋げた論理式を $\mathrm{cut}(L, U)$ とおく．$\mathrm{cut}(L, U)$ の外延 $\mathbb{R}_\mathrm{D} \in \mathrm{Sub}(P\mathbb{Q} \times P\mathbb{Q})$ を **Dedekind 実数対象** (— real number object) もしくは**連続実数対象** (continuous real number object) という．

位相空間上の層が成すトポスでは，Dedekind 実数対象は実直線への連続関数の層に一致することが知られている．このことは Mulvey[5] によって初めて証明された．ここでの証明は MacLane–Moerdijk[3] のものを参考にしている．

定理 36.　位相空間 T 上の通常の位相による層のトポス $\mathbf{Sh}(\mathbf{Set}^{\mathcal{O}(T)^\circ})$ においては，同型の違いを除いて，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}_\mathrm{D}\colon\ \mathcal{O}(T)^\circ &\longrightarrow \mathbf{Set} \\
V &\longmapsto \{ f\colon V \to \mathbb{R} \mid f \text{ は連続関数} \}
\end{aligned}
$$

| と書ける.

定理中の $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ の明示的な表示が定める関手を改めて C とおき，$\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ と C の間に同型があることを示す.

まず $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ の定義から，任意の開部分集合 V に対し，

$$\mathbb{R}_{\mathrm{D}}V = \{(L,\ U) \in (P\mathbb{Q})V \times (P\mathbb{Q})V \mid V \Vdash \mathrm{cut}(L,\ U)\}$$

が成り立つ[*7]．ここで，Yoneda の補題により，

$$\begin{aligned}(P\mathbb{Q})V &\cong \mathrm{Hom}(\boldsymbol{y}V,\ P\mathbb{Q})\\ &\cong \mathrm{Hom}(\boldsymbol{y}V,\ \Omega^{\mathbb{Q}})\\ &\cong \mathrm{Hom}(\boldsymbol{y}V \times \mathbb{Q},\ \Omega)\\ &\cong \mathrm{Sub}(\boldsymbol{y}V \times \mathbb{Q})\\ &\cong \mathrm{Sub}(\mathbb{Q}|_{\mathscr{O}(V)^{\circ}})\end{aligned}$$

が成り立つので，以降は $(P\mathbb{Q})V$ の元と $\mathbb{Q}|_{\mathscr{O}(V)^{\circ}}$ の部分層を同一視することにする．この同一視のもと，任意の $q \in \mathbb{Q}V$ と $L \in (P\mathbb{Q})V$ に対し，

- $L \in (P\mathbb{Q})V$ と見なしたとき，Kripke–Joyal 意味論において $V \Vdash q \in L$ が成り立つ.
- $L \in \mathrm{Sub}(\mathbb{Q}|_{\mathscr{O}(V)^{\circ}})$ と見なしたとき，通常の集合の所属関係の意味で $q \in LV$ が成り立つ.

が同値になることが，上の同型の元の対応を追うことで示される．このことと定理 12, 13 によって，$L, U \in (P\mathbb{Q})V$ が $V \Vdash \mathrm{cut}(L,\ U)$ を満たすことは，8 条件

[1] ある V の被覆 $(V_i)_{i\in I}$ が存在して，任意の $i \in I$ に対して局所定数関数 $q_i\colon V_i \to \mathbb{Q}$ が存在し，$q_i \in LV_i$ が成り立つ.

[2] ある V の被覆 $(V_i)_{i\in I}$ が存在して，任意の $i \in I$ に対して局所定数関数 $r_i\colon V_i \to \mathbb{Q}$ が存在し，$r_i \in UV_i$ が成り立つ.

[3] 任意の開集合 $W \subseteq V$ と任意の局所定数関数 $q, r\colon W \to \mathbb{Q}$ に対し，各点で $q < r$ でありかつ $r \in LW$ が成り立っているならば，$q \in LW$ も成り立つ.

[4] 任意の開集合 $W \subseteq V$ と任意の局所定数関数 $q, r\colon W \to \mathbb{Q}$ に対し，各点で $q > r$ でありかつ $r \in UW$ が成り立っているならば，$q \in UW$ も成り立つ.

[5] 任意の開集合 $W \subseteq V$ および任意の局所定数関数 $q\colon W \to \mathbb{Q}$ で $q \in LW$ なるものに対し，ある W の被覆 $(W_i)_{i\in I}$ が存在して，任意の $i \in I$ に対して局所定数関数 $r_i\colon W_i \to \mathbb{Q}$ が存在し，W_i 上の各点で $q < r_i$ でありかつ $r_i \in LW_i$ が成り立つ.

[6] 任意の開集合 $W \subseteq V$ および任意の局所定数関数 $q\colon W \to \mathbb{Q}$ で $q \in UW$ なるものに対し，ある W の被覆 $(W_i)_{i\in I}$ が存在して，任意の $i \in I$ に対して局所定数関数 $r_i\colon W_i \to \mathbb{Q}$ が存在し，W_i 上の各点で $q > r_i$ でありかつ $r_i \in UW_i$ が成り立つ.

[*7] Dedekind 実数対象の定義中の L や U は Mithell-Bénabou 言語の変項だが，この式での L と U は $(P\mathbb{Q})V$ の実際の元である．記号の濫用ではあるが，変項とそれに対応する実際の元を同じ文字で表記することがしばしばある.

[7] 任意の開集合 $W \subseteq V$ および任意の局所定数関数 $q, r\colon W \to \mathbb{Q}$ で各点で $q < r$ なるものに対し，ある W の被覆 $(W_i)_{i \in I}$ が存在して，任意の $i \in I$ に対し，$q|_{W_i} \in LW_i$ もしくは $r|_{W_i} \in UW_i$ が成り立つ．

[8] 任意の開集合 $W \subseteq V$ と任意の局所定数関数 $q\colon W \to \mathbb{Q}$ に対し，$q \in LW$ かつ $q \in UW$ ならば $W = 0$ である．

を全て満たすことと同値であることが分かる[*8]．

以上のことを踏まえて，任意の開部分集合 V に対し，$\mathbb{R}_{\mathrm{D}}V$ と CV の間の同型を構成する．

まず，任意に $(L, U) \in \mathbb{R}_{\mathrm{D}}V$ をとる．各 $x \in V$ に対し，

$$
\begin{aligned}
L_x &:= \{q \in \mathbb{Q} \mid x \text{ の近傍 } W \text{ が存在して } x \in V \text{ かつ } \overline{q} \in LW\} \\
U_x &:= \{r \in \mathbb{Q} \mid x \text{ の近傍 } W \text{ が存在して } x \in V \text{ かつ } \overline{r} \in UW\}
\end{aligned}
$$

とおく．ここで，$\overline{q}$ は値 q の定値関数を表す．L と U が上の 8 条件を満たすことから，(L_x, U_x) は通常の意味での Dedekind 切断になる．一応もうちょっとちゃんと示そう．したがって，これはある 1 つの実数を定めるから，それを $f_{(L,U)}(x)$ とおくことで，関数

$$
\begin{aligned}
f_{(L,U)}\colon\ V &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto f_{(L,U)}(x)
\end{aligned}
$$

を得る．これは以下に示すように連続である．

書く．

5.4. Brouwer の定理 — 全ての関数は連続

書くだけ．ノートの p5646 から p5653 までを参照．

5.5. Cauchy 実数対象

通常の意味での実数は，Cauchy 列を用いても構成することができた．この構成法は，以下で示すように自然数対象をもつ任意のトポスでも行うことができる．この定義は，Johnstone[2] によるものである．

定義 37. トポスが自然数対象をもつとする．

$$\mathrm{seq}(f\colon \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}) \equiv \forall m\colon \mathbb{N}.\ \forall n\colon \mathbb{N}.\ (0 < m < n) \Rightarrow (-1/n < f(m) - f(n) < 1/n)$$

とおき，$S \in \mathrm{Sub}(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$ をその外延とする．さらに，

$$\mathrm{equiv}(f\colon S,\ f'\colon S) \equiv \forall n\colon \mathbb{N}.\ (0 < n) \Rightarrow (-2/n < f(n) - f'(n) < 2/n)$$

[*8] この条件の中の $\mathbb{Q}$ は有理数全体の集合 (**Set** での有理数対象) である．以降も，トポスの有理数対象と有理数全体の集合とを同じ $\mathbb{Q}$ で表すが，文脈からどちらの意味かは明確であろう．

とおき，$E \in \mathrm{Sub}(S \times S)$ をその外延とする．このとき，部分対象を定める単射 $E \rightarrowtail S \times S$ と積の射影の合成により，2 つの射 $u, v\colon E \to S$ が得られる．これを用いて，余等化子

$$E \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} S \dashrightarrow \mathbb{R}_{\mathrm{C}}$$

を計算する．この $\mathbb{R}_{\mathrm{C}}$ を Cauchy 実数対象 (— real number object) という．

特定の (確か局所連結くらいは必要だったはず) 位相空間上の層が成すトポスでは，Cauchy 実数対象は実直線への局所定数関数の層に一致するらしい．書きたい．

5.6. その他の実数対象

トポス上の実数 (に類似する) 対象の定義は，上に挙げた Dedekind 切断と Cauchy 列によるもの以外にも様々なものが提示されている．例えば，Staples[9] による実数の定義をトポス上に拡張して，Stout[10] では以下のような定義がなされている．

定義 38. トポスが自然数対象をもつとする．

$$\begin{aligned}
\mathrm{cut}_1(L\colon P\mathbb{Q},\ U\colon P\mathbb{Q}) &\equiv \exists q\colon \mathbb{Q}.\ q \in L \\
\mathrm{cut}_2(L\colon P\mathbb{Q},\ U\colon P\mathbb{Q}) &\equiv \exists r\colon \mathbb{Q}.\ r \in U \\
\mathrm{cut}_3(L\colon P\mathbb{Q},\ U\colon P\mathbb{Q}) &\equiv \forall q\colon \mathbb{Q}.\ \forall r\colon \mathbb{Q}.\ (q \in L \wedge r \in U) \Rightarrow q < r \\
\mathrm{cut}_4(L\colon P\mathbb{Q},\ U\colon P\mathbb{Q}) &\equiv \forall s\colon \mathbb{Q}.\ \forall q\colon \mathbb{Q}.\ (q \in L \Rightarrow q < s) \Rightarrow \forall r\colon \mathbb{Q}.\ r > s \Rightarrow r \in U \\
\mathrm{cut}_5(L\colon P\mathbb{Q},\ U\colon P\mathbb{Q}) &\equiv \forall s\colon \mathbb{Q}.\ \forall r\colon \mathbb{Q}.\ (r \in U \Rightarrow r > s) \Rightarrow \forall q\colon \mathbb{Q}.\ q < s \Rightarrow q \in L
\end{aligned}$$

とおき，これらを全て $\wedge$ で繋げた論理式を $\mathrm{cut}(L, U)$ とおき，$\mathrm{cut}(L, U)$ の外延を $K \in \mathrm{Sub}(P\mathbb{Q} \times P\mathbb{Q})$ とおく．さらに，

$$\mathrm{equiv}((L, U)\colon K, (L', U')\colon K) \equiv \forall q\colon \mathbb{Q}.\ (\forall r\colon \mathbb{Q}.\ r \in L \Rightarrow r < q) \Leftrightarrow (\forall r'\colon \mathbb{Q}.\ r' \in L' \Rightarrow r' < q))$$

とおき，$E \in \mathrm{Sub}(K \times K)$ をその外延とする．このとき，部分対象を定める単射 $E \rightarrowtail K \times K$ と積の射影の合成により，2 つの射 $u, v\colon E \to K$ が得られる．これを用いて，余等化子

$$E \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} K \dashrightarrow \mathbb{R}_{\mathrm{S}}$$

を計算する．この $\mathbb{R}_{\mathrm{S}}$ を Staples 実数対象 (— real number object) という．

半連続位相が入った実数に対応するものとしては，Reichman[8] による以下のようなものがある．

定義 39. トポスが自然数対象をもつとする．

$$\mathrm{ucont}(S\colon P\mathbb{Q}) \equiv \forall p\colon \mathbb{Q}.\ \forall q\colon \mathbb{Q}.\ (p < q \Rightarrow q \in S) \Leftrightarrow p \in S$$

とおくとき，この外延 $\mathbb{R}_{\mathrm{U}} \in \mathrm{Sub}(P\mathbb{Q})$ を上半連続実数対象 (upper semicontinuous real number object) と

いう．

$$\mathrm{lcont}(S\colon P\mathbb{Q}) \equiv \forall p\colon \mathbb{Q}.\ \forall q\colon \mathbb{Q}.\ (p > q \Rightarrow q \in S) \Leftrightarrow p \in S$$

とおくとき，この外延 $\mathbb{R}_{\mathrm{L}} \in \mathrm{Sub}(P\mathbb{Q})$ を**下半連続実数対象** (lower semicontinuous real number object) という．

参考文献

[1] F. Borceux (1994)『Handbook of Categorical Algebra 3: Categories of Sheaves』Cambridge University Press

[2] P. T. Johnstone (1977)『Topos Theory』Academic Press

[3] S. MacLane, I. Moerdijk (1992)『Sheaves in Geometry and Logic』Springer

[4] W. Mitchell (1972)「Boolean topoi and the theory of sets」『Journal of Pure and Applied Algebra』2:261–274

[5] C. Mulvey (1974)「Intuitionistic algebra and representations of rings」『Recent Advances in the Representation Theory of Rings and C^*-Algebras by Continuous Sections』3–57

[6] G. Osius (1975)「Logical and set theoretical tools in elementary topoi」『Model Theory and Topoi』297–346

[7] G. Osius (1975)「A note on Kripke–Joyal semantics for the internal language of topoi」『Model Theory and Topoi』349–354

[8] J. Z. Reichman (1983)「Semicontinuous real numbers in a topos」『Journal of Pure and Applied Algebra』28(1):81–91

[9] J. Staples (1971)「On constructive fields」『Proceedings of the London Mathematical Society』3(23):753–768

[10] L. N. Stout (1976)「Topological properties of the real numbers object in a topos」『Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques』17(3):295–326